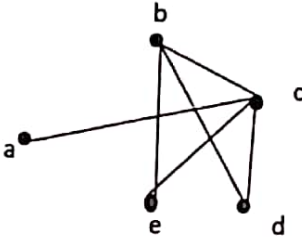
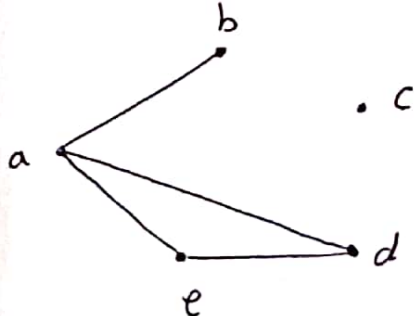


ردیف	شرح سوالات	بارم
1	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. گزاره های درست را ثابت کنید و برای گزاره های نادرست مثال نقض بزنید. الف) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از یک، عدد $2^n - 1$ اول است. $n=4$ درست. ب) برای هر دو عدد مثبت x و y، $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ نادرست $\sqrt{9-1} \neq 3-1$ ج) اگر از مربع عدد فرد یک واحد کم شود، عددی حاصل میشود که مضرب 8 است. درست. $(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) = 4(2k') = 8k' \checkmark$	1/5
2	گزاره های زیر را با روش های مشخص شده ثابت کنید. الف) برای هر عدد صحیح n، به طوری که $n \neq 3k$، در این صورت مربع آن عدد به صورت $3k+1$ می باشد. (با در نظر گرفتن همه حالت ها) $n \neq 3k \Rightarrow n = 3k+1 \vee n = 3k+2$ $(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3k'' + 1 \checkmark$ $(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3k''' + 1 \checkmark$ ب) اگر α, β دو عدد گنگ باشند و $\alpha + \beta$ گویا باشد نشان دهید $\alpha - \beta$ گنگ است. (برهان خلف) فرض کنیم $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$ $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow 2\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q} \times$ پس $\alpha - \beta$ گنگ است.	2
3	گزاره های زیر را با روش بازگشتی ثابت کنید. الف) اگر a, b دو عدد حقیقی مخالف صفر و هم علامت باشند، آنگاه $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \checkmark$ ب) برای هر سه عدد حقیقی x, y, z داریم: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ $\Leftrightarrow$ $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2xz) + (y^2 + z^2 - 2yz) \geq 0$ $\hat{x^2+x^2} \quad \hat{y^2+y^2} \quad \hat{z^2+z^2}$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$ تجميع عبارت های نامنفی، نامنفی است. $\checkmark$	2

2	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) در تقسیم عدد 145 بر 12، خارج قسمت و باقیمانده به ترتیب برابر است با 12 و 13 و 11. ب) عدد 25813 در دسته همنهشتی $\sqrt{\quad}$ به پیمانه 11 قرار دارد. ج) رقم یکان عدد $0! + 2! + 4! + 6! + \dots + 50!$ برابر است با $\sqrt{\quad}$. د) حاصل $[m^8, (m^3, m^7)]$ برابر است با $m^{\wedge}$ (عدد صحیح است).	4
1/5	الف) اگر $a b$ و $a c$ و m و n دو عدد صحیح باشند، نشان دهید $a mb + nc$. $\left. \begin{array}{l} a b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}: b = aq \xrightarrow{\times m} bm = amq \\ a c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}: c = aq' \xrightarrow{\times n} cn = anq' \end{array} \right\} \xrightarrow{+} bm + cn = a(mq + nq') \Rightarrow a bm + cn$ ب) اگر a و b در پیمانه m همنهشت باشند و d یک مقوم علیه برای m باشد، نشان دهید a و b در پیمانه d همنهشت هستند. $\begin{array}{l} a \equiv_m b \Rightarrow m a-b \\ \xrightarrow{\text{تکری}} d a-b \Rightarrow a \equiv_d b \\ \xrightarrow{\text{مقسم علیه}} d m \end{array}$	5
1	در تقسیم عدد a بر 47 باقیمانده از 2 برابر خارج قسمت 4 واحد بیشتر است بیشترین مقدار a را بیابید. $\begin{array}{l} a \overline{) 47} \\ \underline{2q+4} \\ 2q+4 \end{array} \quad r < b \Rightarrow 2q+4 < 47 \Rightarrow 2q < 43 \quad \text{حداکثر } q = 21$ $a = bq + r \Rightarrow a = 47 \times 21 + (2 \times 21 + 4) = 987 + 44 = 1031$	6
1	اگر $a 3k+5$ و $a 5k+4$ در این صورت a چه مقادیری می تواند باشد؟ $\begin{array}{l} a 3k+5 \xrightarrow{\times 5} a 15k+25 \\ a 5k+4 \xrightarrow{\times 3} a 15k+12 \end{array} \Rightarrow a 13 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 13$	7
1	باقیمانده تقسیم عدد $2^{200} + 153^5$ را بر 15 به دست آورید. $\begin{array}{l} 2^4 \equiv_{15} 1 \xrightarrow{\text{بهر توان 50}} 2^{200} \equiv_{15} 1 \\ 15^3 \equiv_{15} 0 \xrightarrow{\text{بهر توان 5}} 15^5 \equiv_{15} 0 \end{array} \Rightarrow 2^{200} + 153^5 \equiv_{15} 1 + 0 \equiv_{15} 1$	8

9	تعداد اعداد صحیح دو رقمی که در معادله هم‌نهشتی مقابل صدق میکنند را بیابید. $4x \equiv 123 \pmod{5}$ $4x \equiv 123 \pmod{5} \Rightarrow -x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv -3 \pmod{5} \Rightarrow \boxed{x = 5k - 3}$ $10 \leq 5k - 3 \leq 99 \Rightarrow 13 \leq 5k \leq 102$ $\frac{13}{5} \leq k \leq \frac{102}{5} \Rightarrow 2,6 \leq k \leq 20,4$ $k = 3, 4, \dots, 20$ تعداد = 18
10	یک بسته 130 کیلو گرمی را به چند طریق می‌توان با وزنه‌های 7 و 3 کیلو گرمی وزن کرد؟ (جواب‌های کلی معادله سیاله خطی را بنویسید.) $7x + 3y = 130 \quad (7, 3) = 1, 1 \mid 130 \quad \checkmark$ $7x \equiv 130 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow \boxed{x = 3k + 1} \rightarrow 7(3k + 1) + 3y = 130$ $3y = -21k + 123 \Rightarrow \boxed{y = -7k + 41}$ $\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow 3k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{3} \\ y \geq 0 \Rightarrow -7k + 41 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{41}{7} \end{cases} \xrightarrow{n} -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{41}{7}$ 4 جواب دارد $\rightarrow k = 0, 1, \dots, 5$
11	نمودار گراف G به صورت مقابل می‌باشد به سوالات زیر پاسخ دهید.  الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید. $V = \{a, b, c, d, e\} \quad E = \{bc, bd, be, ac, ce, cd\}$ ب) یک دور به طول 3 و یک دور به طول 4 معرفی کنید. دور به طول 3: b, c, d, b دور به طول 4: b, d, c, e, b ج) اگر $N_G(x) = \{e, c, d\}$ باشد، x را بیابید. $x = b$ د) گراف $\bar{G}$ را رسم کنید. 
12	در یک گراف از مرتبه 7، درجات رئوس، 2 و 5 هستند. تعداد رئوس از مرتبه 5، چند تا است؟ $S: \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{n} \quad \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{7-n}$ $\sum \deg = 5n + 2(7-n) = 2(10) \quad q = 10$ $3n = 6 \Rightarrow \boxed{n = 2}$

0/5	13	اندازه یک گراف از مرتبه 6، برابر با 14 است. این گراف چند رأس فول دارد؟ $k_4 \rightarrow q = \frac{4 \times 5}{2} = 10$ گراف G، یک گراف از مرتبه 4 دارد. پس 4 رأس فول خواهیم داشت.
1	14	با رئوس $\{a, b, c, d, e\}$ چند گراف با ویژگی های زیر وجود دارد؟ الف) با اندازه 5 به طوری که a با هیچ رئسی مجاور نباشد. ب) با اندازه 6 به طوری که $N_G(a) = \{b, c\}$ $\{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$ الف) $\binom{5}{2} = 10$ ب) $\binom{4}{2} = 6$ ac, ab باشند، بقیه از بین باشند.
1	15	گراف k-منتظم ناتپی از مرتبه 5 رسم کنید به طوری که الف) k ماکسیمم باشد. $k = 4$ ب) k مینیمم باشد. $k = 2$  

در پناه حق موفق و پیروز باشید.